MA1 Domácí úkol č. 9 - lineární algebra.

I. Počítání s vektory a maticemi:

1. a) Určete vektor $\vec{v} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (-1, \ 2, \ 1)$, $\vec{u}_2 = (2, \ 0, \ -1)$, $\vec{u}_3 = (3, \ 1, \ 1)$.
   b) Je-li $\vec{u} = (3, \ 2, \ 2)$, $\vec{v} = (2, \ 1, \ -1)$, spočítejte
   skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$, vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ a smíšený součin $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

2. Vypočítejte následující součiny matice a vektoru (jsou-li definovány):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad (1, \ 2, \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Vypočítejte následující součiny matic (jsou-li definovány):

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

II. Řešení soustav lineárních rovnic a procvičení pojmů k tomu potřebných:

1. Najděte všechna řešení soustavy lineární rovnic (nebo ukažte, že soustava řešení nemá) -
   - užijte Gaussovu eliminační metodu:

a) $$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= -3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ -3x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \quad ;$$

b) $$\begin{aligned} 2x - y + z + v &= -3 \\ x + y + 3z - v &= 0 \\ -x + 2y - z + v &= 6 \\ x + y + 2z - 3v &= -2 \end{aligned}$$

2. Lineární závislost a nezávislost vektorů (a i užití řešení soustav):

   (i) Ukažte, že vektory
   $$\vec{b}_1 = (1, -1, 0), \ \vec{b}_2 = (1, \ -1, \ -1), \ \vec{b}_3 = (0, \ 1, \ -2)$$
   jsou lineárně nezávislé.

   (ii) Rozhodněte, zda vektory
   $$\vec{b}_1 = (1, -1, 0), \ \vec{b}_2 = (1, \ -1, \ -1), \ \vec{b}_3 = (0, \ 1, \ -2), \ \vec{b}_4 = (2, -1, 1)$$
   jsou lineárně nezávislé, resp. lineárně závislé.

3. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Určete hodnost matice A.
b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte.

4. a) Vysvětlete, co je regulární, respektive singulární čtvercová matice.
Definujte pojem inverzní matic . Kdy k dané matici existuje matice inverzní?

b) Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici A .

5. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Vypočítejte součin $A \,.\, B$.
(ii) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji. Dá se použít (i) ?

(iii) Užitím A^{-1} řešte rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a proveďte zkoušku správnosti řešení.

III. Determinanty a jejich užití:

1. Vypočítejte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{vmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} .$$

2. Užitím determinantů určete matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Užitím determinantu „zkontrolujte“, že matice A a B z příkladu II / 5. jsou regulární.

4. Pomocí determinantu spočítejte znovu smíšený součin $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, kde $\vec{u} = (3, \; 2, \; 2)$, $\vec{v} = (2, \; 1, \; -1)$.